SESSION 1992

Concours ESIM

Epreuve de Mathématiques 2 MP

PREMIER PROBLEME

Partie I

1. a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

La règle de d'Alembert montre que la série entière proposée a un rayon de convergence égal à 1 et donc

$$]-1,1[\subset D_\alpha \subset [-1,1].$$

• Pour $x=-1$, si $\alpha \leq 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement et si $\alpha > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant et la série de terme général $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
• Pour $x=1$, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En résumé ,

$$\boxed{\text{si } \alpha \leq 0,\ D_\alpha =]-1,1[,\ \text{si } 0<\alpha\leq 1,\ D_\alpha = [-1,1[\text{ et si } \alpha>1,\ D_\alpha=[-1,1].}$$

b. On sait que la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et donc

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f_\alpha \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

2. a. $-1 \in D_\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$. Soit donc $\alpha \in]0,+\infty[$.
Montrons dans ce cas que la série entière de somme f_α converge uniformément sur $[-1,0[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1,0[$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$.

Soit x fixé dans $[-1,0[$. La suite $\left((-1)^n\dfrac{x^n}{n^\alpha}\right) = \left(\dfrac{|x|^n}{n^\alpha}\right)$ est positive et tend vers 0 en décroissant (produit de deux suites décroissantes et positives). D'après une majoration classique de la valeur absolue du reste d'ordre n d'une série alternée, on a

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup\{|R_n(x)|,\ x \in [-1,0[\} \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Comme $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série entière de somme f_α converge uniformément vers f_α sur $[-1,0[$. On en déduit que f_α est continue sur $[-1,0[$ et en particulier en -1.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (f_\alpha \text{ est continue en } -1 \Leftrightarrow -1 \in D_\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0).}$$

b. Soit $\alpha > 1$. On sait que f_α est dérivable sur $]-1,1[$ et que f'_α s'obtient par dérivation terme à terme. Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}} \text{ et donc } xf'_\alpha(x) = f_{\alpha-1}(x).$$

Maintenant, $\alpha - 1 > 0$ et d'après 2.a., $f_{\alpha-1}$ est définie et continue sur $[-1,1[$. Ainsi, quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, f'_α a une limite réelle égale à $-f_{\alpha-1}(-1)$.

En résumé,

- f_α est continue sur $[-1,1[$,
- f_α est de classe C^1 sur $]-1,1[$,
- f'_α a une limite réelle quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.

D'après un théorème classique d'analyse, f_α est de classe C^1 sur $[-1,1[$ et en particulier dérivable en -1 avec $f'_\alpha(-1) = -f_{\alpha-1}(-1)$.

$$\boxed{\forall \alpha > 1,\ f_\alpha \text{ est dérivable à droite en } -1 \text{ et } f'_\alpha(-1) = -f_{\alpha-1}(-1).}$$

c.

$$f'_2(-1) = -f_1(-1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \text{ (série harmonique alternée).}$$

En effet

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt = \ln 2 - J_n,$$

avec $|J_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \leq \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

$$\boxed{f'_2(-1) = \ln 2.}$$

3. a. $1 \in D_\alpha \Leftrightarrow \alpha > 1$. Soit donc $\alpha \in]1,+\infty[$. La série de somme f_α est normalement convergente sur $[-1,1]$ car pour tout réel $x \in [-1,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

où $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série numérique convergente. La somme est donc continue sur $[-1,1]$ et en particulier en 1.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (f_\alpha \text{ est continue en } 1 \Leftrightarrow 1 \in D_\alpha \Leftrightarrow \alpha > 1).}$$

b. $1 \notin D_\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1$. Soit donc $\alpha \in]-\infty,1]$.
La fonction f_α est croissante sur $[0,1[$ en tant que limite simple sur $[0,1[$ d'une suite de fonctions croissantes sur $[0,1[$. f_α admet donc en 1 une limite à gauche dans $]-\infty,+\infty]$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures on obtient

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f_\alpha(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Cette inégalité est valable pour tout entier naturel N et quand N tend vers ∞, on obtient

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f_\alpha(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \text{ (car } \alpha \leq 1).$$

$$\boxed{\forall \alpha \in]-\infty, 1], \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f_\alpha(x) = +\infty.}$$

c. Soit $\alpha > 2$. D'après 2. b., pour tout $x \in]-1, 1[$, $xf'_\alpha(x) = f_{\alpha-1}(x)$ et comme en 2.b., la fonction f'_α a une limite réelle quand x tend vers 1 (puisque $\alpha - 1 > 1$) égale à $f_{\alpha-1}(1)$. Donc

$$\boxed{\forall \alpha \in]2, +\infty[, \ f_\alpha \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'_\alpha(1) = f_{\alpha-1}(1).}$$

4. a. Soit $\alpha > 1$.
$f_\alpha(0) = 1 > 0$ et si $x \in]0, 1[$, $f'_\alpha(x) = \dfrac{1}{x} f_{\alpha-1}(x) > 0$.
Soit $x \in]-1, 0[$. La série de somme $f_{\alpha-1}(x)$ est une série alternée. La somme de cette série donc du signe de son premier terme x c'est-à-dire stictement négative et encore une fois $f'_\alpha(x) = \dfrac{1}{x} f_{\alpha-1}(x) > 0$.

$$\boxed{\forall \alpha > 1, \ f'_\alpha \text{ est strictement positive sur }]-1, 1[.}$$

b. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$xf'_2(x) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

ce qui reste vrai pour $x = -1$ d'après 2.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1[, \ xf'_2(x) = f_1(x) = -\ln(1-x).}$$

c. Pour $x \in]0, 1[$, $f'_2(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Cette expression tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Un théorème classique d'analyse permet alors d'affirmer que la fonction f_2 n'est pas dérivable en 1 mais que sa courbe représentative admet en son point d'abscisse 1 une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

5. a. Théorème local de Dirichlet. Soit f une fonction définie et ce classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, 2π-périodique. La série de Fourier de f converge en tout réel x vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

b. La fonction g est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ car g et g' ont une limite réelle quand x tend vers 2π par valeurs inférieures. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g en $x = 0$ converge vers

$$\frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = \frac{g(0) + g(2\pi^-)}{2} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2.$$

Calcul de $a_n(g)$ (le calcul de $b_n(g)$ est superflu).

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n} \, dx \right) = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) \, dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\left[x \times -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} \, dx \right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi} [x \cos(nx)]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$2\pi^2 = \frac{g(0^+)+g(0^-)}{2} = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(n\times 0) + b_n(g)\sin(n\times 0) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

et finalement

$$f_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{f_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

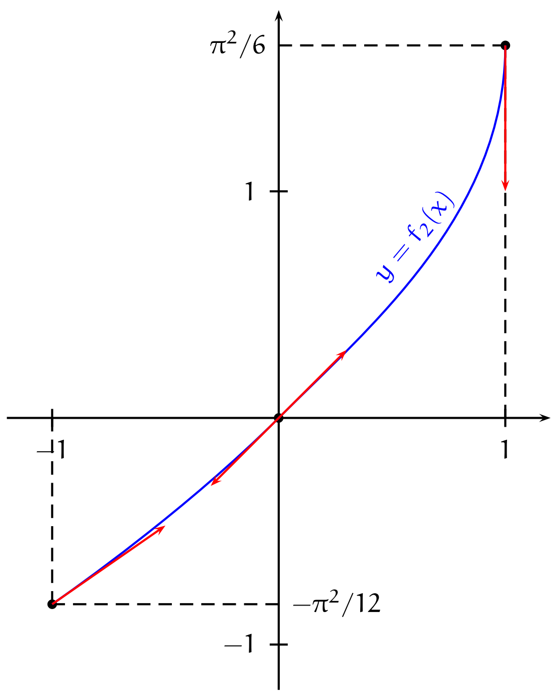
c.

$$f_2(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \left(-1+\frac{2}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Donc

$$\boxed{f_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

6. Graphe de f_2.



Partie II

1. a. Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. S est un réel strictement positif au vu des hypothèses faites sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Quand n tend vers $+\infty$, pour x réel non nul donné, $S_n x^n \sim S x^n$ de sorte que la série numérique de terme général $S_n x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Le rayon de convergence de la série proposée est donc 1.

Sur l'intervalle $]-1,1[$, la série entière de somme g est le produit de CAUCHY des séries entières de termes généraux respectifs $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto a_n x^n$. Donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{g(x)}{1-x}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \frac{g(x)}{1-x}.}$$

b. Soit $x \in]-1,1[$.

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{g(1)}{1-x} - \frac{g(x)}{1-x} = S\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(S-S_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.}$$

2. a. Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, on sait que $R_b = R_a = 1$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel non nul N tel que $(n \geq N \to |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} a_n$. Soit alors $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n + \sum_{n=N}^{+\infty}|a_n-b_n|x^n \leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.\end{aligned}$$

Maintenant, $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. En effet, la fonction g est croissante sur $]0,1[$ en tant que limite simple d'une suite de fonctions croissantes sur $]0,1[$ (puisque les a_n sont tous positifs) et admet donc une limite à gauche en 1 dans $]-\infty,+\infty]$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $x \in]0,1[$, $g(x) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Par passage à la limite quand x tend vers 1, on obtient

$$\lim_{x\to 1} g(x) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Cette inégalité étant valable pour tout entier naturel n, quand n tend evrs $+\infty$ on obtient

$$\lim_{x\to 1} g(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty,$$

et finalement

$$\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty.$$

Mais alors, puisque $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n = \sum_{n=0}^{N-1} < +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n}{g(x)} = 0$. Par suite, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour $x \in]1-\alpha,1[$, $\frac{\sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2}$ ou encore $\sum_{n=0}^{N-1}|a_n-b_n|x^n < \frac{\varepsilon}{2} g(x)$. Pour $x \in]1-\alpha,1[$, on a donc

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0,1[/ \ \forall x \in]1-\alpha, 1[, \ \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| < \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \underset{x\to 1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.}$$

3. Posons $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la question 1. et d'après II.1.b. et I.5.b., pour $x \in]-1,1[$,

$$f_2(x) = f_2(1) + (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = \frac{\pi^2}{6} + (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n \text{ où } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Déterminons alors un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.
Quand k tend vers $+\infty$, $0 < \dfrac{1}{k^2} \sim 1k(k-1) = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. La règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que quand n tend vers $+\infty$,

$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \text{ (série télescopique).}$$

En particulier, la série de terme général R_n est divergente. D'après II.2.b., quand x tend vers 1,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Finalement,

$$\boxed{f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi^2}{6} + (1-x)\ln(1-x) + o((1-x)\ln(1-x)).}$$

